Een foto van de Eusebiuskerk

We bekijken de volgende goniometrische formule:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \qquad (1)$$

De juistheid van deze formule kan worden bewezen door gebruik te maken van:

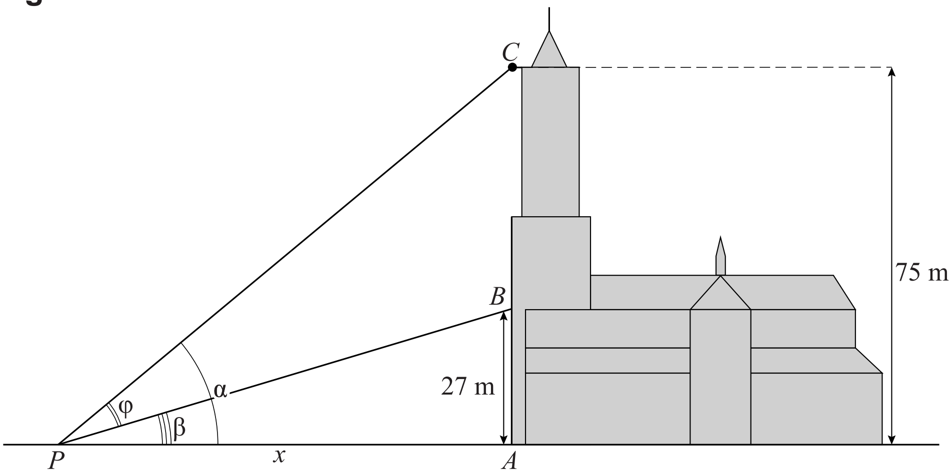
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \qquad (2)$$

3p **13** Bewijs dat formule 1 juist is.

Een fotograaf wil de toren van de Eusebiuskerk in Arnhem zo duidelijk mogelijk op de foto krijgen. Hij vraagt zich af op welke afstand van de kerk hij dan moet gaan staan. Deze afstand berekenen we in deze opgave.

In figuur 1, op de volgende bladzijde, is de situatie schematisch weergegeven. Punt A is een punt aan de voet van de toren. De punten B en C liggen beide recht boven punt A. Punt B ligt op een hoogte van 27 meter boven A. Punt C ligt op een hoogte van 75 meter boven A.
De fotograaf staat bij punt P op een afstand van x meter van A. Hij zet zijn camera in P op de grond zó dat alleen het deel van de toren tussen B en C op de foto staat. Er geldt: $\angle PAB = 90°$. Verder is $\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle APB$ en $\varphi = \alpha - \beta$. We noemen φ de **kijkhoek**.

figuur 1



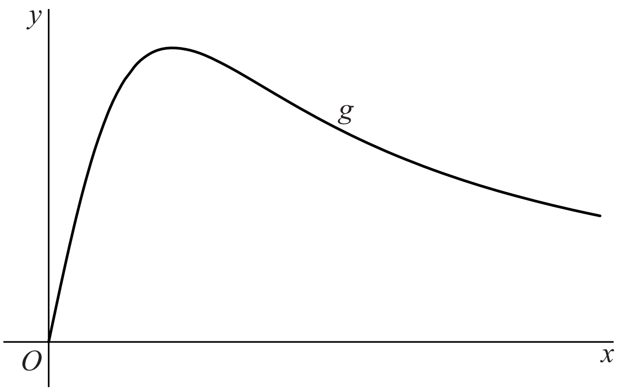
Door gebruik te maken van formule 1 is het mogelijk $\tan(\varphi)$ uit te drukken in x. Er geldt:

$$\tan(\varphi) = \frac{48x}{x^2 + 2025} \qquad (3)$$

3p **14** Bewijs dat formule 3 juist is.

In figuur 2 is de grafiek van de functie g met functievoorschrift $g(x) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$ geschetst.

figuur 2



Om het deel van de toren tussen B en C zo duidelijk mogelijk op de foto te krijgen, moet kijkhoek φ maximaal zijn. Dat is het geval als $\tan(\varphi)$ maximaal is. In figuur 2 is te zien dat er een waarde van x bestaat waarvoor $g(x)$ en dus $\tan(\varphi)$ maximaal is.

4p **15** Bereken exact op welke afstand de fotograaf moet staan zodat de kijkhoek maximaal is.